

基于内在表示的空间曲线去噪算法

任庆军 王树艳 蔡增霞

(临沂师范学院数学系, 临沂 276000)

摘要 介绍了一种对空间离散曲线进行去噪声的新的方法。不同于一般的顶点表示方法, 这里对离散曲线采用一种新的内在表示方法, 用曲线的内在几何量——边长和边与 x 轴正方向、 z 轴正方向的夹角来表示点的位置。利用双边滤波的思想, 对边与 x 轴正方向、 z 轴正方向夹角进行去噪声。然后以去噪后的角度作为一个约束条件, 构造目标函数来反求曲线的顶点。该方法的优点主要在于解决了去噪声方法中一般都会产生的收缩问题, 并且能够保持基本的特征。

关键词 去噪 双边滤波 内在表示 曲线收缩

中图分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2008)02-0269-08

An Intrinsic 3D Discrete Curve Smoothing Algorithm

REN Qing-jun, WANG Shu-yan, CAI Zeng-xia

(Department of Mathematics, Linyi Normal University, Linyi 276000)

Abstract In this paper, we propose a new method for 3D discrete curve smoothing by adopting an intrinsic representation for discrete curves. With this representation, a piecewise 3D curve is defined by lengths of edges, angles between edges and the positive x -axis and angles between edges and the positive z -axis. For a noisy curve, we first filter the two angle sequences of the curve by bilateral filtering method. Then we obtain the smoothed vertexes of the curve by solving an objective function under the constraint of the two angle sequences. By this algorithm, not only can main features of the original curve be preserved well, but also the smoothed curve no longer suffers from shrinkage.

Keywords smoothing, bilateral filtering, intrinsic representation, curve shrinkage

1 引言

本文所指的曲线均为空间离散多边形曲线(把一系列离散点用直线段连接起来形成的曲线), 一般我们处理的曲线都是反映物体形状信息的曲线, 比如物体轮廓线、人体切片轮廓线等。这些数据是由坐标测量机、激光扫描仪等 3 维数字仪测量得到的, 但是由于测量和计算过程中经常存在误差, 总会产生一些不可避免的数据扰动, 称之为噪声。这些数据首先需要经过去噪处理, 才能进行后续的工作, 如模式识别、边界检测、反求工程, 以及曲线信息(周

长、面积等)求解等。

曲线去噪声有很多种方法, 在早期的去噪算法中, 比较普遍的方法是将信号处理中的去噪算法应用到曲线去噪中, 其主要步骤是用傅里叶变换将空域转换到频域上, 噪声对应到频域上就是高频信号, 去噪声即是将高频信号去除。比如 Gauss 滤波^[1-3], 就是将信号与 Gauss 函数 ($g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$) 进行卷积, 然后将结果转化到空域上就得到了滤波后的顶点。但是 Gauss 滤波有一个共知的缺点——产生收缩现象, 并且不能有效地保持尖锐特征。

差分光顺也是曲线去噪普遍使用的一种方法,

收稿日期: 2006-02-27; 改回日期: 2006-07-17

第一作者简介: 任庆军(1962~), 男, 教授。1984 年于曲阜师范大学获理学学士学位。主要研究方向为离散数学、计算机图形学。

E-mail: qjr288@126.com

Choi, Jerard在 1998年提出了进行二阶、四阶差分光顺算法^[4],而 Cho和 Cho进一步证明了偶数阶差分的性质,由原始离散曲线用添加顶点的方法拓展出两种新的曲线——反射填补曲线 (reflection-padded curve)以及镜面延伸曲线 (mirror-extended curve)^[5],这两种曲线分别是在原始曲线的基础上,用不同的方法将曲线进行延伸而得到,并证明了反射填补曲线的偶数阶差分光顺就等价于离散傅里叶变换滤波。

Li等人利用点列离散曲率以及离散曲率的一阶差分检测出性质不好的点,并根据曲率及曲率差分的变化将这些顶点分为两类: SBP (single bad point)和 MBP (multiple bad point),然后根据点的曲率性质不同采用不同的方法,从而决定顶点去噪时应该移动的方向和距离^[6]。

曲线去噪还可以直接对顶点进行, Jones 和 Fleishman等人利用 Tomasi, Manduchi提出的图像双边滤波方法^[7],在当前顶点定义一个局部坐标系,利用双边滤波对高度函数进行去噪,从而得到顶点的位置^[8,9]。这两种方法基本解决了保持尖锐特征的问题,但是收缩还是它的一个缺点。

所谓收缩,对图像来讲,收缩就是指灰度趋于一致,对于曲线来讲,收缩是指曲线随着迭代次数的增加逐渐趋向于一个点。收缩问题是去噪中的一个相当重要的问题,比如在反求工程中,由曲线族反求曲面,如果有曲线产生收缩,就会引起曲面变形。为了解决收缩问题,近年来很多人都做了这方面的研究工作。

Low提出了一种解决曲线去噪收缩问题的修正算法^[10],利用高斯滤波去噪后,估计去噪后曲线的收缩量,最后将估计的收缩量加到去噪后的曲线上,从而人为地控制收缩。Oliensis在 Gaussian滤波的基础上,重新构造了一个低通滤波函数^[11],首先给定两个频率常量 K_L 和 K_U ($K_L < K_U$),定义函数在低于 K_L 的范围内函数值为 1,高于 K_U 的范围内函数值为 0 使得低频信号得到保持,并人为地将高频信息去除,这种方法虽然可以控制收缩,但是却不能保持曲线的尖锐特征。Taubin提出了一个没有明显收缩的方法^[12,13],实际上是两次 Gaussian滤波叠加,只是两次滤波的参数选择不同,对参数加以控制可以产生收缩或者扩张的效果,两次滤波交替进行,从而控制收缩。但是它产生了相当于低通滤波的效果,效果仍然不够理想。

本文给出了一种空间离散曲线新的内在表示方法,并利用这种内在表示方法,在 Tomasi, Manduchi提出的双边滤波的基础上^[7],提出了一种新的去噪方法,解决了去噪过程中的收缩问题。

2 双边滤波

Tomasi, Manduchi提出的保形图像去噪方法——双边滤波 (bilateral filtering)^[7],是将当前点的灰度值用周围点的灰度值的加权平均来代替,权因子不只和两点之间的几何距离有关,更和它们的灰度值差异有关,所以称之为双边滤波。

一般来讲,对连续函数 $y = f(x)$ 进行双边滤波的公式如下:

$$F(x) = k^{-1}(x) \int_{-}^{+} f(\xi) c(\xi, x) \times s(f(\xi), f(x)) d\xi \tag{1}$$

式中, $F(x)$ 为滤波后的输出函数,

$$c(\xi, x) = e^{-\|\xi-x\|^2/2\sigma_c^2}$$

$$s(f(\xi), f(x)) = e^{-\|f(\xi)-f(x)\|^2/2\sigma_s^2}$$

$$k(x) = \int_{-}^{+} c(\xi, x) s(f(\xi), f(x)) d\xi$$

式(1)的离散表达式为

$$F(x) = \frac{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c(\xi_j, x) s(f(\xi_j), f(x)) \times f(\xi_j) \Delta\xi}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c(\xi_j, x) s(f(\xi_j), f(x)) \times \Delta\xi} = \frac{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_c(\|\xi_j - x\|) W_s(\|f(\xi_j) - f(x)\|) \times f(\xi_j) \Delta\xi}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_c(\|\xi_j - x\|) \times W_s(\|f(\xi_j) - f(x)\|) \Delta\xi}$$

这里, $-\infty < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} < \dots < \xi_1 < \xi_0 < \xi < \dots < \xi_{-1} < \xi < \dots < +\infty$, $\Delta\xi = \xi_j - \xi_{j-1}$, W_c, W_s 都是高斯函数: $W_c(x) = e^{-x^2/2\sigma_c^2}$, $W_s(x) = e^{-x^2/2\sigma_s^2}$, 其中, σ_c, σ_s 为常数。不妨设 $\Delta\xi$ 为常数,可得

$$F(x) = \frac{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_c(\|\xi_j - x\|) W_s(\|f(\xi_j) - f(x)\|) \times f(\xi_j)}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_c(\|\xi_j - x\|) W_s(\|f(\xi_j) - f(x)\|)} \tag{2}$$

以图像去噪为例来解释一下双边滤波。若将式(2)用到图像去噪中,只需将函数 $f(x)$ 换成灰度函数, σ_c, σ_s 对于去噪效果有较大的影响。 σ_c 越大,权因子中距离产生的影响就越大,而 σ_s 越大,相邻

像素的灰度差异对权因子的影响就会加强, 反之亦然。这种方法将灰度的差异引入权因子, 所以能较好地保持图像边界。当然直接对灰度进行加权平均得到去噪后点的灰度值一般都会产生收缩, 也就是灰度值趋于一致。双边滤波也不例外。

Jones 和 Fleishman 等人把这种方法应用到网格上, 得到了比较好的去噪声效果^[2 3]。主要思想是将所有的顶点沿着法线方向移动一段距离, 使得曲线或者曲面看起来比较平滑。它们的主要优点在于能够保持尖锐特征, 缺点仍然是会产生收缩。这种方法之所以会产生收缩, 以文献 [3] 为例, 它是对一阶邻域内点到曲线在当前顶点的切平面的高度函数进行双边滤波, 得到当前顶点沿着法向移动的距离, 由此求得新的顶点。鉴于双边滤波的收缩问题, 应用到网格和曲线上也会产生收缩。既然对高度函数进行滤波会产生收缩, 我们想到可以对曲线的走向进行滤波, 即对曲线内在几何量——边与 x 轴正向的夹角进行双边滤波, 这是因为曲线的噪声或者光滑程度在一定程度上可以由这些角度来反映。为此给出曲线的一种新的内在表示方法。

3 曲线的内在表示

对于空间曲线, 由以往的知识知道, 球坐标表示也能唯一地表示边向量, 由此可以得到空间曲线的内在表示。

一般情况下的空间曲线都是用 3 维点列给出的, 空间曲线的内在表示是用边长和角度表示的, 边长是指曲线边向量的长度, 而角度有两个, 分别是球坐标表示中的两个角度——一个是边向量在 xy 平面上的投影与 x 轴正方向的夹角, 另一个是边向量与 z 轴正方向的夹角, 如图 1 所示。

记 $\{p_i = (x_i, y_i, z_i); i = 0, 1, \dots, n\}$ 为空间曲线的顶点, $\{V_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 为边向量, $V_i = p_{i+1} - p_i$ 表示由顶点 p_i 指向 p_{i+1} 的向量, $\{V'_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示边向量在 xy 平面上的投影向量。 $\{e_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示多边形的边长, 且 $e_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$, $\{\theta_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示边向量在 xy 平面上的投影向量与 x 轴正方向的夹角, $\{\varphi_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示边向量与 z 轴正方向的夹角, 那么可以得到如下的表达式:

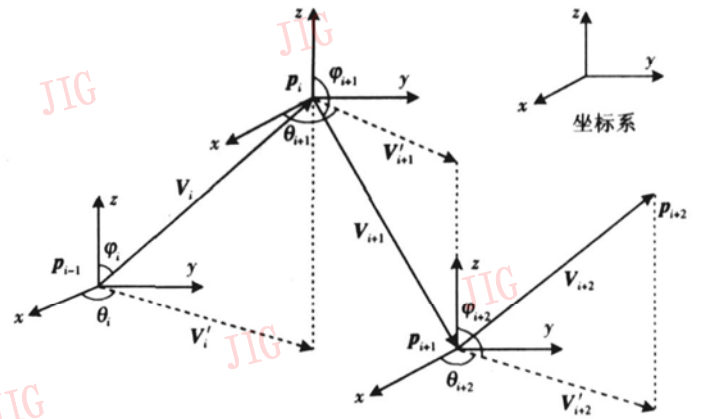


图 1 空间离散曲线的内在表示

Fig 1 Intrinsic representation of 3D discrete curve

$$\begin{cases}
 \text{当向量 } V'_i \text{ 落在第一、四象限时} \\
 \theta_i = \arctan \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \\
 \text{当向量 } V'_i \text{ 落在第二象限时} \\
 \theta_i = \arctan \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right| + \pi \\
 \text{当向量 } V'_i \text{ 落在第三象限时} \\
 \theta_i = \arctan \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right| - \pi
 \end{cases} \quad (3)$$

式中, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

$$\varphi_i = \arccos \left| \frac{z_{i+1} - z_i}{e_i} \right| \quad (4)$$

式中, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

由上面的表达式可以得到: $\theta_i \in [-\pi, \pi]$, $\varphi_i \in [0, \pi]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $\{(e_i, \theta_i, \varphi_i); i = 1, 2, \dots, n-1\}$ 就称为空间曲线的内在表示。那么, 由向量的球坐标表示的唯一性可以知道, 在给定初始点 p_0 的条件下, 这种空间曲线的内在表示和它的点列表示是一一对应的。

4 角度的双边滤波

空间曲线内在表示的 3 个几何量中, 两个角度决定着曲线的整体走向, 因此, 这里采用对角度滤波的方式来达到曲线光滑的效果, 所谓对角度进行双边滤波, 是指将式 (2) 中的灰度值分别用内在表示中的两个角度代替, 从而实现对这两个角度的双边去噪。

设对角度 θ_i, φ_i 进行双边滤波得到的新的角度为 θ'_i, φ'_i , 表达式如下:

$$\theta'_i = \frac{W_c(\|p_i - p_{i-1}\|)W_s(|\theta_i - \theta_{i-1}|)\theta_{i-1} + W_c(\|p_i - p_{i+1}\|)W_s(|\theta_i - \theta_{i+1}|)\theta_{i+1} + \theta_i}{W_c(\|p_i - p_{i-1}\|)W_s(|\theta_i - \theta_{i-1}|) + W_c(\|p_i - p_{i+1}\|)W_s(|\theta_i - \theta_{i+1}|) + 1}$$

$$= \frac{W_c(e_{i-1})W_s(|\theta_i - \theta_{i-1}|)\theta_{i-1} + W_c(e_i)W_s(|\theta_i - \theta_{i+1}|)\theta_{i+1} + \theta_i}{W_c(e_{i-1}) \times W_s(|\theta_i - \theta_{i-1}|) + W_c(e_i)W_s(|\theta_i - \theta_{i+1}|) + 1} \tag{5}$$

$$\varphi'_i = \frac{W'_c(\|p_i - p_{i-1}\|)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i-1}|)\varphi_{i-1} + W'_c(\|p_i - p_{i+1}\|)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i+1}|)\varphi_{i+1} + \varphi_i}{W'_c(\|p_i - p_{i-1}\|)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i-1}|) + W'_c(\|p_i - p_{i+1}\|)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i+1}|) + 1}$$

$$= \frac{W'_c(e_{i-1})W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i-1}|)\varphi_{i-1} + W'_c(e_i)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i+1}|)\varphi_{i+1} + \varphi_i}{W'_c(e_{i-1}) \times W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i-1}|) + W'_c(e_i)W'_s(|\varphi_i - \varphi_{i+1}|) + 1} \tag{6}$$

式中, $W'_c(x) = e^{-x^2/2\sigma_c'^2}$, $W'_s(x) = e^{-x^2/2\sigma_s'^2}$, σ_c' , σ_s' 为常数。

σ_c , σ_s , σ_c' , σ_s' 分别是它们的自由参数。读者可以根据自己的需要适当选取 σ_c , σ_s , σ_c' , σ_s' 。式 (5) 式 (6) 只是一阶邻域的离散展开, 所谓一阶邻域, 就是直接与当前顶点相连的顶点。实际上, θ'_i 就是 θ_{i-1} , θ_i , θ_{i+1} 的线性组合, φ'_i 就是 φ_{i-1} , φ_i , φ_{i+1} 的线性组合。

在式 (5) 中还有一个需要注意的问题, 就是角度的范围。式 (3) 中给出的角度定义在 $[-\pi, \pi]$ 上, 那么式 (5) 中的角度之差就有可能大于 π 。两个向量的角度差有两个: θ 或 $2\pi - \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$), 在这里统一取 θ ($0 \leq \theta < \pi$)。也就是需要改变 θ_{i-1} , θ_{i+1} 的值 (加或者减 2π 的整数倍), 使得 $|\theta_i - \theta_{i-1}|$, $|\theta_i - \theta_{i+1}|$ 的值落在 $[0, \pi)$ 之内。两个角度差中选择落在 $[0, \pi)$ 之间的那个。经过这样的改变, 最后得到的 θ'_i 就不一定会落在 $[-\pi, \pi]$ 内, 所以最后为了方便统一处理, 再将 θ'_i 的值转化到 $[-\pi, \pi]$ 的范围之内 (经过加减 2π 的整数倍)。

对于式 (6) 中的 $|\varphi_i - \varphi_{i-1}|$, $|\varphi_i - \varphi_{i+1}|$ 则不同, 这是因为 $\varphi_i \in [0, \pi]$, 所以可以得到 $|\varphi_i - \varphi_{i-1}|$, $|\varphi_i - \varphi_{i+1}| \in [0, \pi)$, 因此不需要进行这方面的处理。

不过对与 x 轴夹角进行去噪得到的结果会随着坐标系选择的不同而不同, 因为坐标系变化会导致夹角也随着变化, 从而使得去噪结果发生变化, 当然这种变化很小, 不会产生很大的影响。由式 (5) 式 (6) 得到光滑的角度之后, 并不能直接得到去噪声之后的顶点, 因为仅仅角度并不能确定顶点的位置。

5 反求顶点

对角度完成双边滤波之后, 直接的办法是再对边长进行双边滤波, 因为由边长和角度可以唯一确定一条曲线, 这时候就可以由边长和夹角反求曲线

顶点。曲线的边长经过滤波只是变得平均, 总体长度上不会发生很大的变化, 而滤波后的角度使得曲线变得光滑, 所以反求得到的曲线会比原始曲线长很多。以平面曲线为例, 一条带有噪声的直线段经过这样的去噪后会变得平直, 但是因为边长总体来说并没有发生很大的变化, 去噪相当于把带有噪声的线段拉直, 使得去噪后的曲线显得长了很多。但是因为是对边长和角度单独进行滤波, 没有任何其他的约束条件, 这样得到的曲线不可避免存在变形, 很大地偏离原来的噪声曲线。图 2 所示是对一条总体来说比较平直的平面噪声曲线去噪声。可以看到去噪之后的曲线比原始曲线长了很多, 相当于拉直了, 并且略微有变形。如果曲线是闭合曲线, 那么用这种方法滤波之后的曲线包围的面积就会变大。

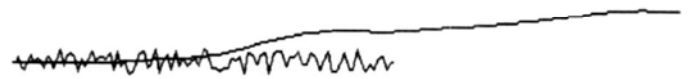


图 2 线段噪声曲线以及用边长角度直接滤波反求顶点得到的去噪曲线

Fig 2 Noisy line segment and curve denoised by filtering edges and angles

为了解决曲线的变形和偏离, 以去噪之后的角度作为一个条件, 构造一个目标函数, 求得使这个目标函数达到最小的顶点值, 从而达到对曲线去噪的目的。

设 $\{p_i = (x_i, y_i, z_i); i = 0, 1, \dots, n\}$ 表示去噪后得到的新顶点, $\{e_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示由新的顶点得到的边的长度, $\{\theta'_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示经过去噪之后的边向量在 xy 平面上的投影向量与 x 轴正半轴的夹角, $\{\varphi'_i; i = 0, 1, \dots, n-1\}$ 表示去噪之后的边向量与 z 轴正方向的夹角。

希望去噪之后的曲线能够光滑 (角度变化比较平缓), 并且不会与原始曲线偏离太远 (去噪后的顶点与去噪之前的原始顶点距离尽可能近), 从而产生较小的变形, 综合以上两条, 去噪之后的空间曲线应该满足以下 3 个条件:

- (1) $\hat{\theta}_i$ 与 θ'_i 之差尽可能小;
- (2) φ_i 与 φ'_i 之差尽可能小;
- (3) \hat{p}_i 与 p_i 能尽可能比较接近。

为了满足这 3 个条件, 构造下面的目标函数:

$$\begin{aligned}
 f(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i) &= \|\hat{p}_i - p_i\|^2 + k \|\hat{\theta}_{i-1}(\hat{p}_i) - \theta'_{i-1}\|^2 + \\
 &\quad m \|\varphi_{i-1}(\hat{p}_i) - \varphi'_{i-1}\|^2 \\
 &= |\hat{x}_i - x_i|^2 + |\hat{y}_i - y_i|^2 + |\hat{z}_i - z_i|^2 + \\
 &\quad k \|\hat{\theta}_{i-1}(\hat{p}_i) - \theta'_{i-1}\|^2 + m \|\varphi_{i-1}(\hat{p}_i) - \varphi'_{i-1}\|^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

这里, $k > 0, m > 0$ 均是参数, 可以自行选取。因为是逐个反求顶点, 所以 $\hat{x}_{i-1}, \hat{y}_{i-1}, \hat{z}_{i-1}$ 是已知量, 因此 $\hat{\theta}_{i-1}, \varphi_{i-1}$ 都只是 $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ 的函数, 所以式 (7) 也只含有 $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ 3 个变量。使得式 (7) 取得最小值的 $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ 值就是所求得的新顶点 \hat{p}_i 。只不过, $\|\hat{\theta}_i - \theta'_i\|^2$ 与 $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$ 的表达式比较复杂, 不利于求导运算, 更不利于求解方程组, 所以利用近似逼近的方法来替代 $\|\hat{\theta}_i - \theta'_i\|^2$ 。如图 3 所示。

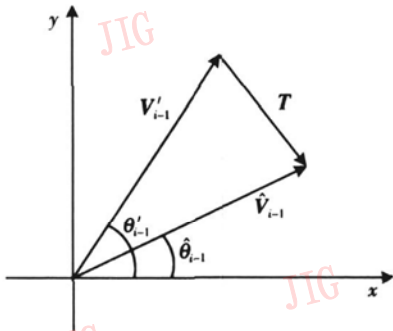


图 3 角度之差 $\|\hat{\theta}_i - \theta'_i\|^2$ 示意图

Fig 3 Sketch map of difference of angles $\|\hat{\theta}_i - \theta'_i\|^2$

记 $V'_{i-1} = (\cos\theta'_{i-1}, \sin\theta'_{i-1}, 0)$ 为 xy 平面内与 x 轴正方向夹角为 θ'_{i-1} 的单位向量, 设 V_{i-1} 是去噪后的边 $\hat{p}_{i-1}\hat{p}_i$ 在 xy 平面上的投影向量所对应的单位向量, 则 $V_{i-1} = \left| \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})}{l_{i-1}}, \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{l_{i-1}}, 0 \right|$, 其中,

$l_{i-1} = \sqrt{(\hat{x}_{i-1} - \hat{x}_i)^2 + (\hat{y}_{i-1} - \hat{y}_i)^2}$ 为 $\hat{p}_{i-1}\hat{p}_i$ 在 xy 平面上的投影向量的长度。记 $\hat{l}_{i-1} = \sqrt{(\hat{x}_{i-1} - x_i)^2 + (\hat{y}_{i-1} - y_i)^2}$, 那么为简化计算, 可用 \hat{l}_{i-1} 近似代替 l_{i-1} , 则 V_{i-1} 可近似表示为 $\left| \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})}{\hat{l}_{i-1}}, \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{\hat{l}_{i-1}}, 0 \right|$ 。

记 $T = V_{i-1} - V'_{i-1}$ (图 3)。因为去噪前后的角度相差不是很大, 所以有

$$\begin{aligned}
 \|T\| &\approx \|V'_{i-1}\| \sin(\theta'_{i-1} - \hat{\theta}_{i-1}) = \sin(\theta'_{i-1} - \hat{\theta}_{i-1}) \\
 &\approx |\theta'_{i-1} - \hat{\theta}_{i-1}|
 \end{aligned} \tag{8}$$

由式 (8) 得:

$$\begin{aligned}
 \|\theta'_{i-1} - \hat{\theta}_{i-1}\|^2 &\approx \left| \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})}{\hat{l}_{i-1}} - \cos\theta'_{i-1} \right|^2 + \\
 &\quad \left| \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{\hat{l}_{i-1}} - \sin\theta'_{i-1} \right|^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

对于 $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$, 可以用其他的量来代替, 如图 4 所示。

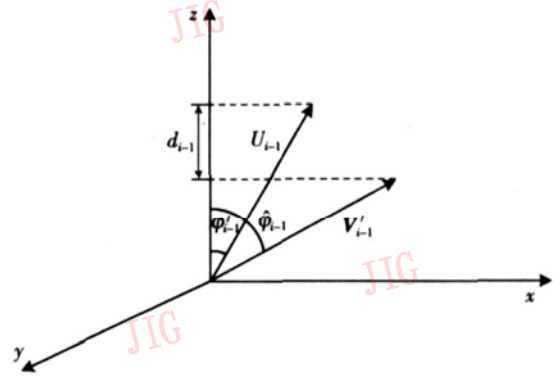


图 4 角度之差 $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$ 示意图

Fig 4 Sketch map of difference of angles $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$

记 $U_{i-1} = (\cos\theta'_{i-1} \sin\varphi'_{i-1}, \sin\theta'_{i-1} \sin\varphi'_{i-1}, \cos\varphi'_{i-1})$ 为与 z 轴正方向夹角为 φ'_i , 在 xy 平面投影向量与 x 轴正方向夹角为 θ'_{i-1} 的单位向量, 设 V_{i-1} 是去噪后边 $\hat{p}_{i-1}\hat{p}_i$ 所对应的单位向量, 则

$$V_{i-1} = \left| \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})}{\hat{e}_{i-1}}, \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{\hat{e}_{i-1}}, \frac{(\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1})}{\hat{e}_{i-1}} \right|$$

记

$$\hat{L}_{i-1} = \sqrt{(x_i - \hat{x}_{i-1})^2 + (y_i - \hat{y}_{i-1})^2 + (z_i - \hat{z}_{i-1})^2}$$

则 \hat{L}_{i-1} 可以用来近似代替 \hat{e}_{i-1} , 也就是说

$$V_{i-1} \approx \left| \frac{(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})}{\hat{L}_{i-1}}, \frac{(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})}{\hat{L}_{i-1}}, \frac{(\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1})}{\hat{L}_{i-1}} \right|$$

通过图 4 可以看出, 单位向量与 z 轴正方向的夹角 φ 跟向量在 z 轴上的投影——坐标分量的大小有直接的关系, z 坐标越大, φ 越大; 相反, z 坐标越小, φ 也越小。所以式 (7) 中的 $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$ 可以用单位向量的 z 坐标之差来代替, 记

$$d_{i-1} = \frac{\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1}}{\hat{L}_{i-1}} - \cos\varphi' \tag{10}$$

也就是说可以用 d_{i-1} 来代替目标函数中的 $\|\varphi_i - \varphi'_i\|^2$ 。

将式 (9) 式 (10) 代入式 (7) 可得:

$$\begin{aligned}
 f(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i) &= (\hat{x}_i - x_i)^2 + (\hat{y}_i - y_i)^2 + (\hat{z}_i - z_i)^2 + \\
 &\quad k \left| \frac{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}}{\hat{l}_{i-1}} - \cos\theta_i \right|^2 + \left| \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{\hat{l}_{i-1}} - \sin\theta_i \right|^2 + \\
 &\quad m d_{i-1}^2
 \end{aligned}$$

$$m \left| \frac{\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1}}{\hat{L}_{i-1}} - \cos\varphi_i \right|^2 \quad (11)$$

那么式 (11)取得最小值与式 (7)取得最小值是等价的, 也就是说使得式 (11)取得最小值的顶点也就是使得式 (7)取得最小值的顶点。

很明显, 式 (11)也是关于 $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ 的三元二次函数, 求导之后得到三元一次方程组

$$\begin{cases} \hat{x}_i - x_i + k \left| \frac{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}}{\hat{L}_{i-1}} - \cos\theta_i \right| \cdot \frac{1}{\hat{L}_{i-1}} = 0 \\ \hat{y}_i - y_i + k \left| \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{\hat{L}_{i-1}} - \sin\theta_i \right| \cdot \frac{1}{\hat{L}_{i-1}} = 0 \\ \hat{z}_i - z_i + m \left| \frac{\hat{z}_i - \hat{z}_{i-1}}{\hat{L}_{i-1}} - \cos\varphi_i \right| \cdot \frac{1}{\hat{L}_{i-1}} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

求解式 (12)就得到新的顶点

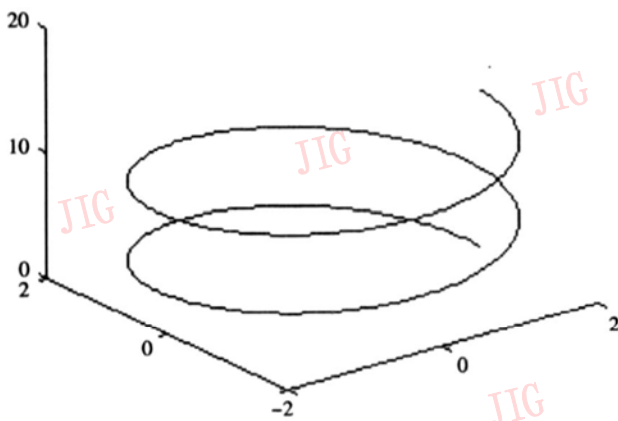
$$\hat{p}_i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i): \begin{cases} \hat{x}_i = \frac{\hat{L}_{i-1}^2 x_i + k \hat{x}_{i-1} + k \hat{L}_{i-1} \cos\theta_{i-1}}{k + \hat{L}_{i-1}^2} \\ \hat{y}_i = \frac{\hat{L}_{i-1}^2 y_i + k \hat{y}_{i-1} + k \hat{L}_{i-1} \sin\theta_{i-1}}{k + \hat{L}_{i-1}^2} \\ \hat{z}_i = \frac{\hat{L}_{i-1}^2 z_i + m \hat{z}_{i-1} + m \hat{L}_{i-1} \cos\varphi_{i-1}}{m + \hat{L}_{i-1}^2} \end{cases}$$

6 算法的实例

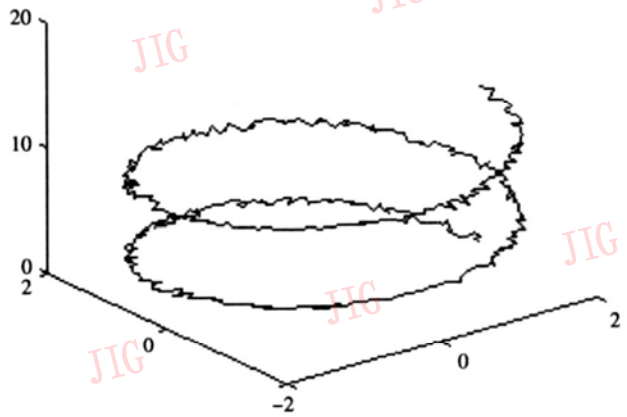
通过上面的分析, 可以看出, 本文算法主要分为 3 步进行: 首先将空间曲线的坐标表示转换成内在表示, 然后分别对两个角度进行双边滤波, 最后根据目标函数反求新的顶点序列。下面举例说明本文算法的实现效果。

本文算法中共有 6 个自由参数: 2 个高斯函数中的参数 $\sigma'_c, \sigma'_s, \sigma_c, \sigma_s$ 以及反求顶点时的参数 k, m , 在算法实现过程中需要对这些参数进行调节, 以便得到最佳的效果。

图 5 (a)是一条离散的空间螺旋曲线, 由 419 个顶点组成, 图 5 (b)是将图 5 (a)加上随机噪声所得到的噪声螺旋曲线 (噪声是曲线法平面上的随机噪声), 也是滤波的初始顶点序列。图 6 (a)是经过本文算法 5 次迭代之后得到的去噪曲线, 其中算法实现过程中参数取值分别为 $\sigma'_c = \sigma_c = 0.3, \sigma'_s = 5, \sigma_s = 10, k = 0.005, m = 0.015$ 。通过图 6 可以看到, 此算法对于一般的曲线去噪结果比较理想。



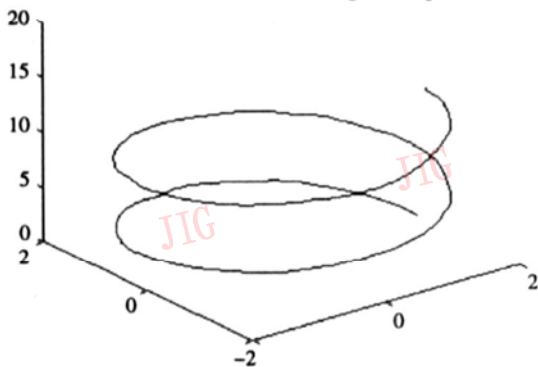
(a) 螺旋曲线的原始图形



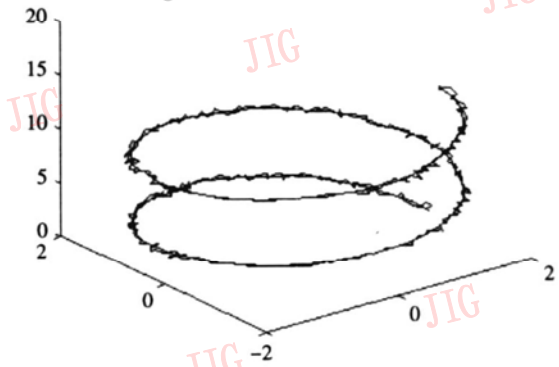
(b) 加噪声之后的图形

图 5 螺旋曲线加噪前后效果图

Fig 5 Spiral curve before and after noising



(a) 螺旋噪声曲线去噪之后



(b) 去噪前后图形叠加图

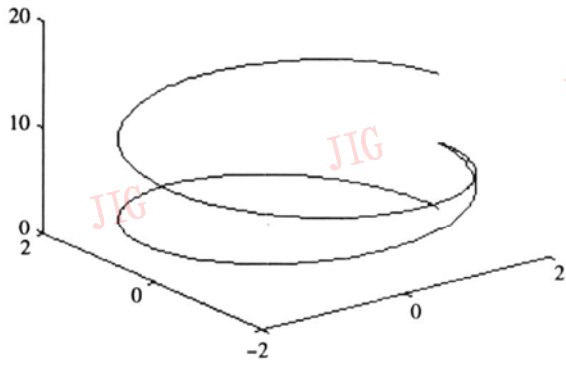
图 6 螺旋曲线去噪前后效果图

Fig 6 Spiral curve before and after denoising

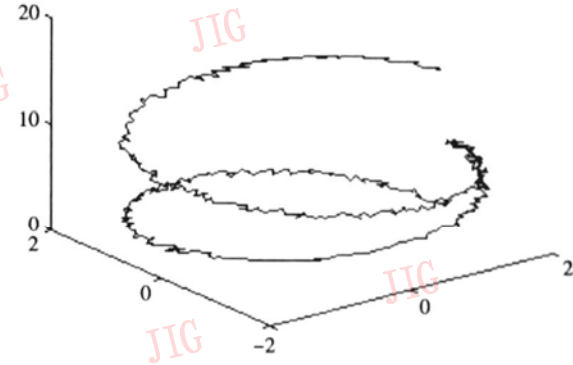
图 7 (a)是一条带有尖点的原始光滑空间曲线, 将它加上随机噪声之后得到了图 7 (b)中所显示的噪声曲线。对于这种带有尖点的空间曲线, 与平面离散曲线一样, 希望去噪之后的曲线能够保持尖锐特征 (尖点不被光滑掉), 并且希望得到的去噪曲线不会产生收缩, 但是以前的算法基本上都不能解决这个问题, 而本文算法基本上解决了这个问题。

图 8 (a)是图 7 (b)经过本文算法去噪之后得到的光滑曲线, 迭代次数是 5 次。参数的选取与图 5 (b)去噪时选择的参数相同, 也得到了比较好的结果。

图 9、图 10所示的是对长方体的部分边界线 (长方体的一半边界) 进行去噪的过程。图 9 (a)是长方体的原始边界, 加上随机噪声之后如图 9 (b)所示。利用本文算法进行去噪的时候要适当的对参数



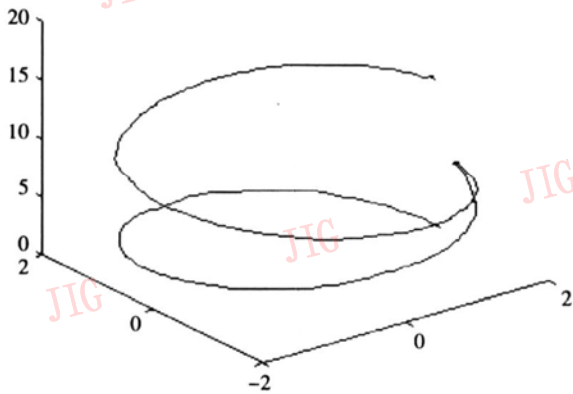
(a) 光滑的原始螺旋尖点图



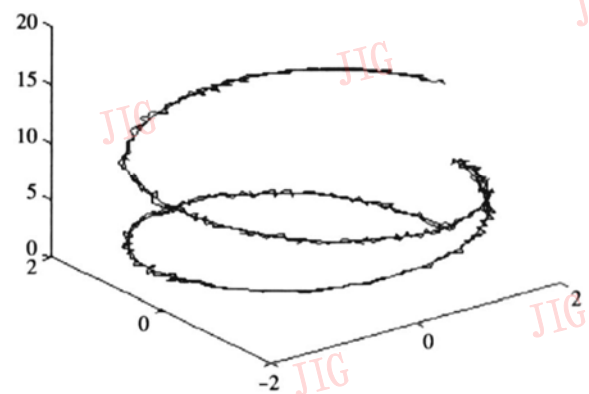
(b) 加噪声之后的螺旋尖点图

图 7. 带有尖点的螺旋曲线加噪声前后效果图

Fig 7 Spiral curve with sharp point before and after noising



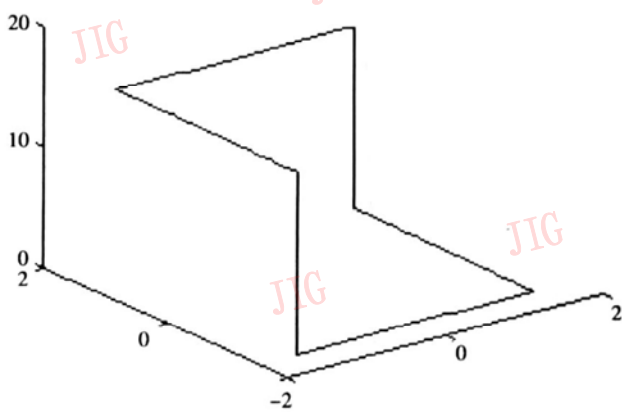
(a) 经过本文算法去噪之后的螺旋带尖点曲线



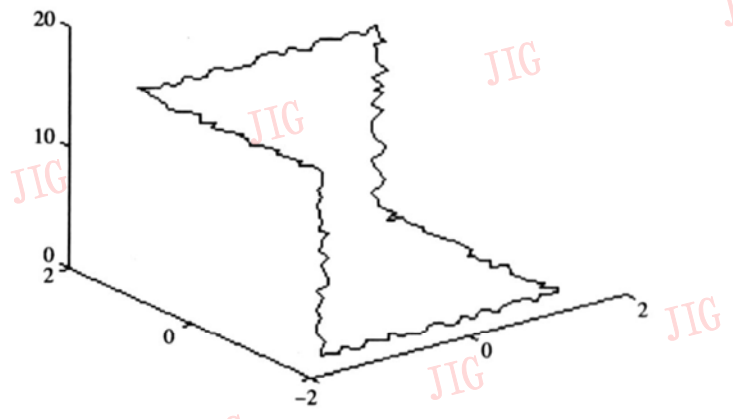
(b) 去噪前后曲线叠加图

图 8 螺旋带尖点曲线去噪效果图

Fig 8 Effect of denoising spiral curve with sharp point



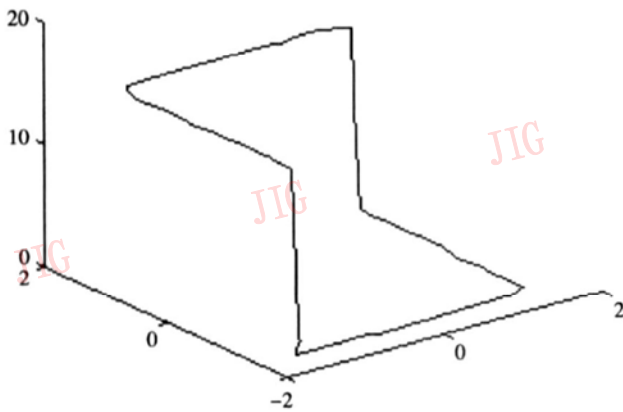
(a) 长方体部分边界原始图形



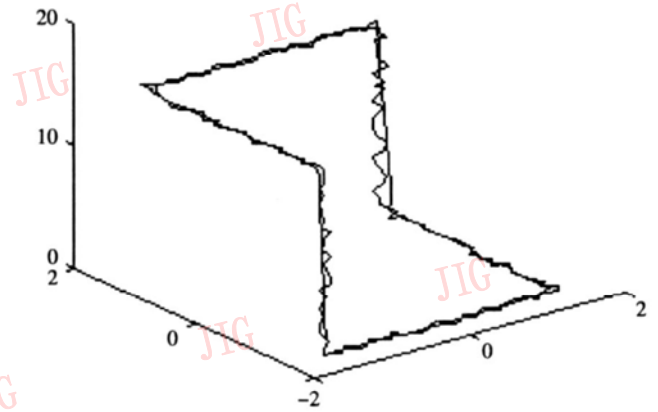
(b) 加噪声之后的效果图

图 9 长方体部分边界线加噪前后效果图

Fig 9 Partial boundary of cuboid before and after noising



(a) 长方体部分边界噪声曲线去噪后



(b) 去噪前后图形叠加效果图

图 10 长方体部分边界去噪后效果图

Fig 10 Partial boundary of cuboid before and after denoising

进行调整。参数 σ'_c , σ'_s , σ_c , σ_s 的大小没有发生改变, 与前面两个例子中的取值相同。但是 k, m 的取值却有所变化, 如果不改变 k, m 的值, 得到的去噪结果就不理想, 这是由曲线本身的性质决定的。图 10 是对图 9(b) 利用本文算法得到的去噪结果, 算法实现过程中的 k, m 分别为 $k=0.0005$, $m=0.0015$ 。 k, m 值的变小使得算法迭代次数有所增加, 算法迭代 25 次之后得到的去噪曲线才比较平滑, 并且相应的尖点也得到了较好的保持。

本文算法是对空间曲线去噪的一大改进, 解决了曲线去噪的收缩问题。当然也有不足之处, 就是在保持尖锐特征方面不是特别好, 尤其在迭代次数增加的情况下。

7 结 论

本文将空间离散曲线采用内在表示, 对边向量和 x 轴、 z 轴正半轴的夹角进行双边滤波, 利用去噪后的角度构造了一个目标函数, 反求得到了曲线新的顶点。因为本文算法滤波的对象是表示曲线走向的角度, 并且把去噪后顶点和噪声曲线顶点的距离作为目标函数的一部分, 所以这种新的去除曲线噪声的方法不会产生一般算法的收缩现象。本文算法的一个缺点是在保持尖锐特征方面效果不是很好, 并且需要多次迭代, 当然这跟参数的选择有很大关系, 参数选择不同, 需要的迭代次数和产生的去噪效果都会发生较大变化。虽然如此, 在保持特征方面, 本文算法还是比传统的低通滤波要好。以后的工作是完善本文算法, 使得它能同时解决好收缩和保持特征问题。

参考文献 (References)

- 1 Marinont D H. A representation for image curves [A]. In Proceedings of American Association for Artificial Intelligence [C], Austin, TX, USA, 1984: 237~242
- 2 Mokhtarian F, Mackworth A. Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1986, 8(1): 34~44
- 3 Witkin A P. Scale-space filtering [A]. In Proceedings of the Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence [C], Karlsruhe, West Germany, 1983: 1019~1022
- 4 Choi B K, Jerard R B. Sculptured surface machining-theory and applications [M]. London: Kluwer Academic Publisher, 1998
- 5 Cho S K, Choi B K. Analysis of difference fairing based on DFT-filter [J]. Computer Aided Design, 2001, 33(1): 45~56
- 6 Liu G H, Wong Y S, Zhang Y F, et al. Adaptive fairing of digitized point data with discrete curvature [J]. Computer Aided Design, 2002, 34(4): 309~320
- 7 Thouis R, Jones F, Durand M D. Non-iterative feature-preserving mesh smoothing [A]. In Computer Graphics Proceedings Annual Conference Series ACM SIGGRAPH [C], San Diego, CA, USA, 2003: 943~949
- 8 Shashar F I, Dori D C. Bilateral mesh denoising [A]. In Computer Graphics Proceedings Annual Conference Series ACM SIGGRAPH [C], San Diego, CA, USA, 2003: 950~953
- 9 Tomasi C, Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images [A]. In Proceedings of the Sixth International Conference on Computer Vision [C], Bombay, India, 1998: 839~846
- 10 Lowe D G. Organization of smooth image curves at multiple scales [J]. International Journal of Computer Vision, 1989, 3: 119~130
- 11 Oliensis J. Local reproducible smoothing without shrinkage [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(3): 307~312
- 12 Taubin G. Curve and surface smoothing without shrinkage [A]. In Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision, Massachusetts Institute of Technology [C], Cambridge, Massachusetts, UK, 1995: 852~857
- 13 Taubin G. A signal processing approach to fair surface design [A]. In Computer Graphics Proceedings Annual Conference Series ACM SIGGRAPH [C], Los Angeles, USA, 1995: 51~358